

توانع پیروزی  
چشمه

$$f(x+T) = f(x)$$

معمولاً خواص دوره‌ی تناوب

تابع  $f(x)$  را می‌توانیم دارای دوره‌ی تناوب  $T$  است ادرا

آنچه می‌بینیم دوره‌ی تناوب است  
اگر  $T$  دوره‌ی تناوب تابع  $f(x)$  باشد  $nT$  هم دوره‌ی تناوب آن خواهد بود.

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

$$f(x) = f(x + 2\pi) \quad 2\pi = T$$

دوره‌ی تناوب تابع  $f(x) = \sin 2x$  را بدست آوریم

$$\sin 2x = \sin(2x + 2\pi)$$

$$\sin 2[x] = \sin 2[x + \pi]$$

$$f(x) = f(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$$

← دوره‌ی تناوب  $\sin nx$  می‌شود  $T = \frac{2\pi}{n}$

$\cos nx$

بسط فوری

بسط فوری تابع پیروزی  $f(x)$  با دوره‌ی تناوب  $T = 2\pi$  (برای هر  $n$  صحیح)

متخل از جملات  $\sin$  و  $\cos$  می‌باشد (جهت زیر است)  
تصرف با

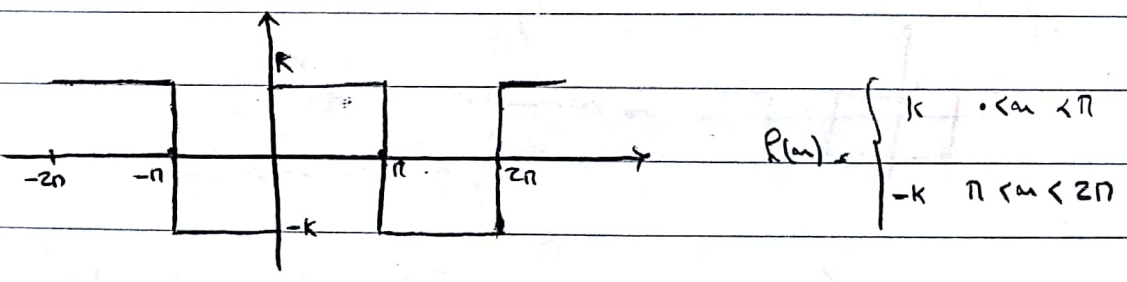
$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots + b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ضرایب اوسه} \\ \text{بط فوسیه} \end{array}$$

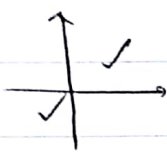
رطال حاضر نروس می کنیم به این عبارات بط فوسیه را می توانیم صرفه را داشته این عبارات را استخراج خواهیم کرد.

سهانه  $f(x)$  فوسیه تابع  $f(x)$  را در  $2\pi$  را می توانیم اوسه.

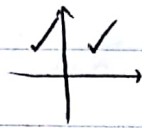


$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \Rightarrow \text{میانگین اوسه (میانگین) در یک دوره کامل (2\pi) صفر است}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k \cos nx dx = +\frac{k}{n\pi} \sin(n\pi - 0) = 0 \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 k \cos nx dx = -\frac{k}{n\pi} \sin(0 + n\pi) = 0 \end{cases}$$



زوج  $f(-x) = -f(x)$

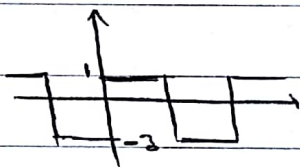
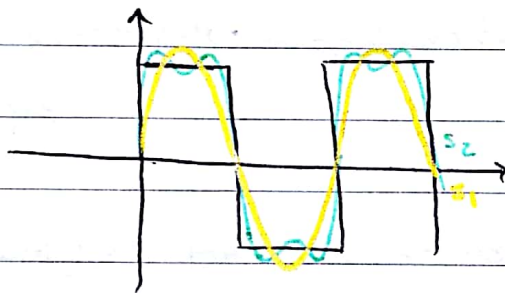


زوج  $f(-x) = f(x)$

$$b_n = \frac{1}{n} \int_{-n}^n \sin nx f(x) dx = \frac{1}{n} \left( \int_0^n K \sin nx dx + \int_{-n}^0 -K \sin nx dx \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left( -\frac{K}{n} (\cos(nn) - 1) + \frac{K}{n} (1 - \cos(nn)) \right) = \frac{2K}{n^2} (1 - \cos n\pi)$$

$$f(x) = \frac{4K}{n} \sin nx + \frac{4K}{3n^2} \sin 3nx + \dots = \frac{4K}{n} (\underbrace{\sin nx}_{s_1} + \underbrace{\frac{\sin 3nx}{3}}_{s_2} + \dots)$$

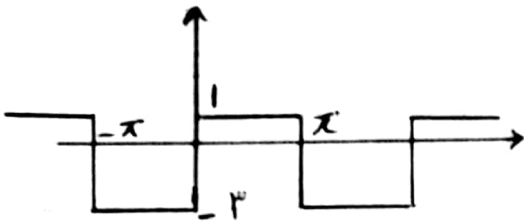


اینجا از هر دو طرف بالا است یعنی  
یک واحد مثبت و یک واحد منفی

مثلاً اگر  $f(x)$  را از روی شکل بدست آورده و می‌خواهیم آن را به سری سینوس (تعداد تعداد 15  $S_{15}$ )  
تقریب کنیم یا بخواهیم ضرایب  
آن را بدست آوریم (از کجا بدست آوریم) در هر حال می‌توانیم از روی شکل بدست آوریم.

تلف

سط فوري تايع (f(x) آكره شده يا مادروش بديست آكره)



فصل (14, 1, 94)

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$$

f(x) تايب با دوره ثابت 2π است.

توسعه ضرب ابري:  $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx$$

$$m \neq n \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \\ = 0 \end{array} \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

(در صورتی که m و n با هم برابر باشند)

$$m = n \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \sin 2mx + \frac{1}{2} x \right\}_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} [\cos(n-m)x - \cos(m+n)x] \, dx$$

$$m \neq n \rightarrow \left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{r} (-1) \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x + \frac{1}{r} \frac{1}{n-m} \sin(n-m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$m = n \rightarrow \left\{ = \frac{1}{r} (-1) \cdot \frac{1}{r m} \sin r m x + \frac{1}{r} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi \right.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} [\sin(m+n)x + \sin(n-m)x] \, dx$$

$$m \neq n \rightarrow \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} [\sin(m+n)x + \sin(n-m)x] \, dx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \right.$$

$$m = n \rightarrow \left\{ = \frac{1}{r} \left( -\frac{1}{r m} \right) \cos r m x + \frac{1}{r} (x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \right.$$

(عند  $m=n$ ) فيكون  $\cos mx$  ،  $f(x)$  مع  $\cos$

if  $m=n \rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = 0 + \pi \cdot a_n \rightarrow a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx}{\pi}$$

(عند  $m=n$ ) فيكون  $\sin mx$  ،  $f(x)$  مع  $\sin$

if  $m=n \rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = 0 + 0 + b_n \pi \rightarrow b_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx}{\pi}$$

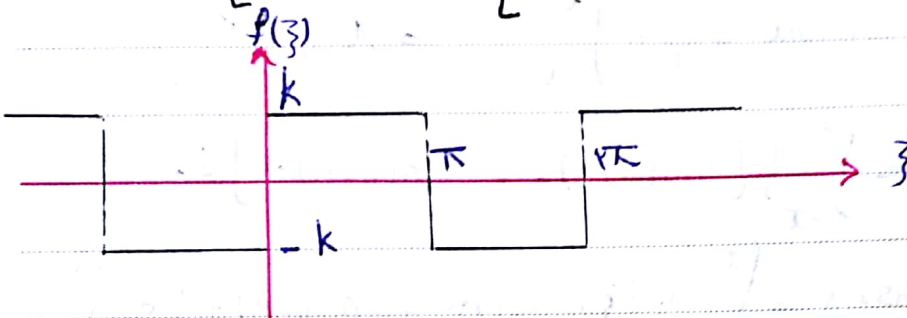
ازجوع  $f$  ،  $\sin$  ،  $\cos$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx + a_n \sin nx \, dx \rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

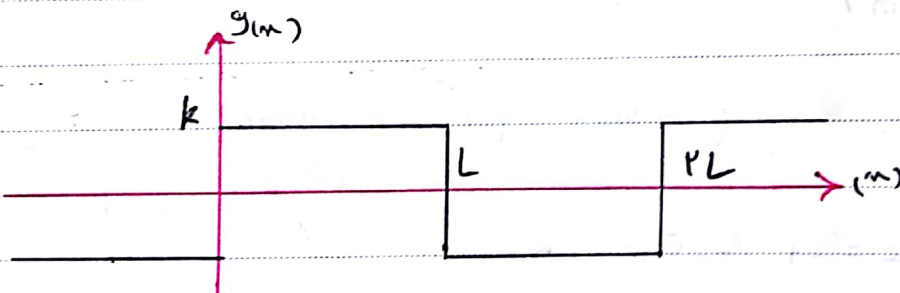
تقدیر دلخواہ  $T = 2L$ ، ادا رہے؟

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos \frac{3\pi x}{L} + \dots + a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$+ b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots$$



$$f(z) = a_0 + \sum (a_n \cos(nz) + b_n \sin(nz))$$



$$\frac{z}{\pi} = \frac{m}{L} \rightarrow z = \frac{\pi m}{L} \rightarrow dz = \frac{\pi}{L} dm$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi m}{L}\right) = a_0 + \sum \left( a_n \cos n \frac{\pi m}{L} + b_n \sin n \frac{\pi m}{L} \right)$$

$$\Rightarrow g(m) = a_0 + \sum \left( a_n \cos n \frac{\pi m}{L} + b_n \sin n \frac{\pi m}{L} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(m) \cdot \cos \frac{n\pi m}{L} \cdot dm$$

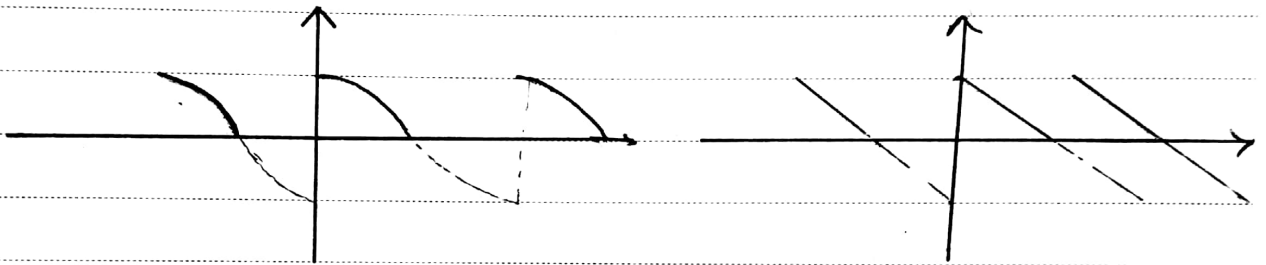
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(m) \sin \frac{n\pi m}{L} dm$$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\pi n}{L}\right) \pi \frac{dn}{L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

در برخی موارد تابع در نصف دوره تناوب داده می شود و به مانعته می شود

### - sine half-range expansion

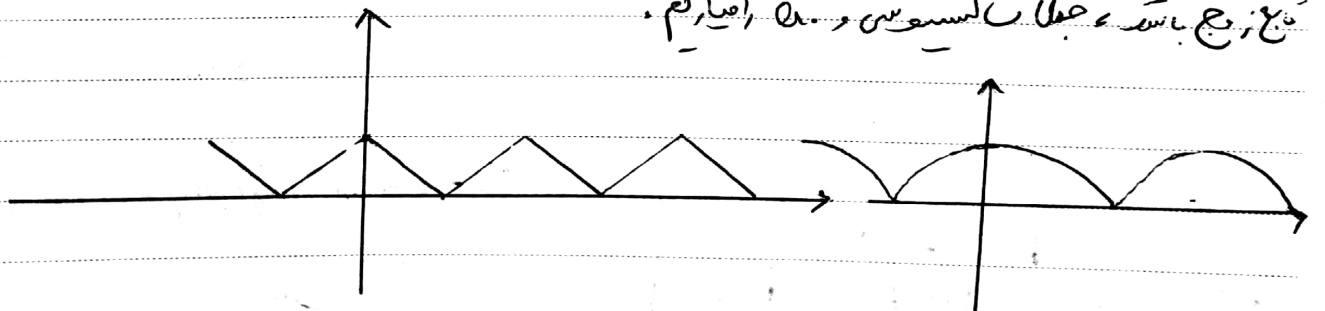
این را می توانیم به نظر؟ زمین عالی که تابع دلخواهی می باشد سینوسی است.



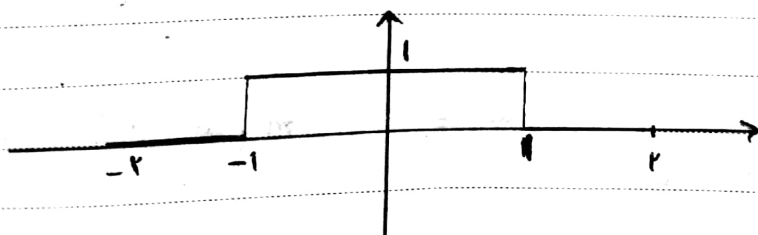
(یعنی؟ تابع فرد باشد و نصف تابع باشد)

### - cosine half-range expansion

تابع زوج باشد و جملات سینوسی و cos اعداد نام

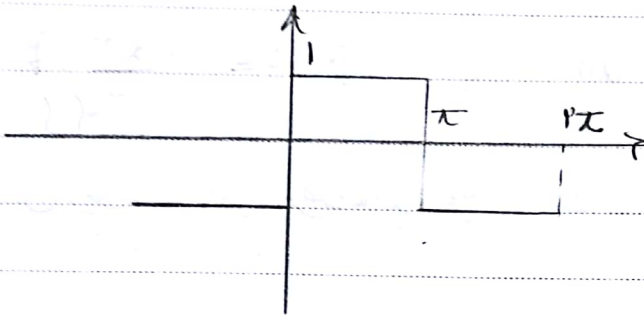


مثال: نسبتاً تابع در ربع اول



تابع نامعلوم است. 
$$g(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi x}{1} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{2} \dots \right)$$

حاصل عبارت زیر را بدست آورید. 
$$A = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$



$$f(x) = \frac{F}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{F}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots \right]$$

$$\rightarrow A = \frac{\pi}{F}$$

# 11.1. 2, 8, 9\*, 17\*, 19\*, 21

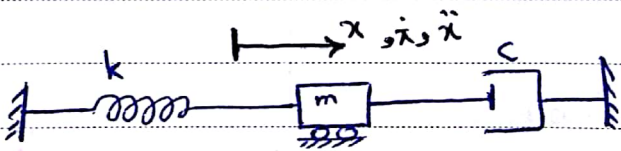
# 12.2. 8, 9\*, 10, 11\*, 20\*, 29, 28 <sup>بیشتر 10 در زیر</sup>

جلد ۳ (۲۷، ۸، ۹۶)

11.3. forced oscillations  $\rightarrow$  نوسانات اجباری

یا چادر ریاضیاتی

رسم جسم آزاد (Free body diagram)



مجموعه از جسم و فنر و دیسپراتر

خ: جابجایی فنر از حالت خنثی

تساوی جسم m

x-dot: سرعت جسم (جسم ۱)



Subject :

Year.

Month.

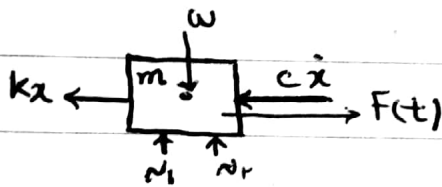


فصل ششم دینامیک (shock absorber) لغت فیزیک خودروه

مشخصه خاصیت سیال:  $c$

رشته فشار واردمی بی رین از قبل حاصله حال

$$F \propto \dot{x} \rightarrow F = c \dot{x}$$



Free body diagram

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad (\sum F_x = m\ddot{x})$$

در این درس نیروی  $F(t)$  تابع بیرونی است. (با)  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

برای تشخیص همگن بودن یک معادله،  $F(t)$  را صفر می‌کنیم. حاصل شرایط همگنی معادله شده

$F(t)$  است.

$F(t)$  (نیروی خارجی) عامل خارج غزل معادله دینامیک از حالت همگن می‌باشد.

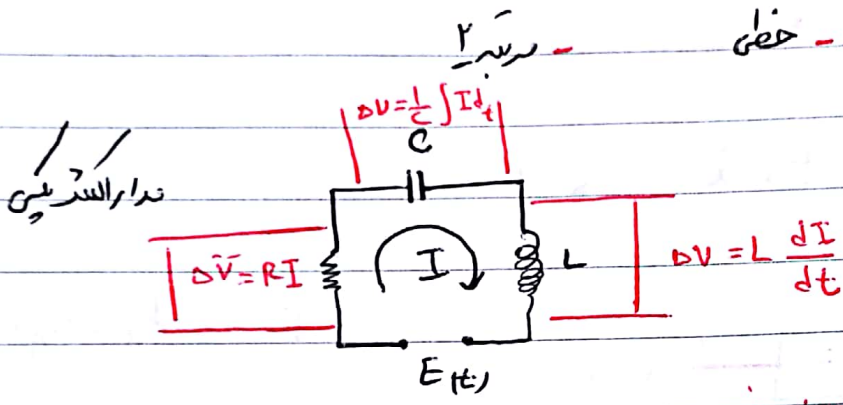
معادله  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  معادله همگن است چون  $n$  در آن صفر می‌گردد.

این معادله همگن است چون حاصل ضرب  $\ddot{x}$ ،  $\dot{x}$  و  $x$  در معادله وجود ندارد.

Subject : \_\_\_\_\_  
 Year. \_\_\_\_\_ Month. \_\_\_\_\_

ویژگی های مغاثر را،

غیر متصل



$$RI + \frac{1}{C} \int I dt + L \frac{dI}{dt} = E(t)$$

از طرفین مشتق  
بگیریم

$$R\dot{I} + \frac{1}{C} I + L\ddot{I} = \dot{E}(t)$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{E}(t)$$

حرف  
مرتبه ۲  
غیر متصل

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{حالت آزاد} \Rightarrow x_c = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

جواب مسئله را در نظر بگیرید.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi t}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{L} + \dots$$

$$+ b_1 \sin \frac{\pi t}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi t}{L} + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L})$$

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = a_i \cos \frac{i\pi t}{L} + b_i \sin \frac{i\pi t}{L}$$

Subject :

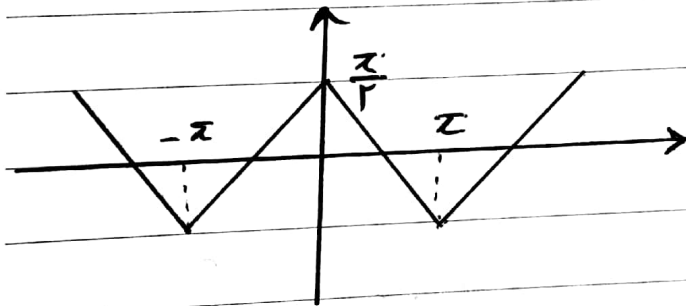
Year. Month.

$$x_p = \frac{a_0}{k} + \sum_1^{\infty} x_i \quad (1)$$

$$x(t) = x_p + x_c \xrightarrow{(1,2)} x(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \frac{a_0}{k} + \sum_1^{\infty} x_i$$

مثال سیستم جرم-بند-بند تحت نیروی خارجی پریودیته دارد شده اصل غایب. (جواب حالت پایا)

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + ky = r(t) \quad m=1, c=1, k=25$$



جدول 2.1 شکل جواب های خاص پریودیته  
از جدول معادله (ع 12) جواب میگیریم

$$r(t) = \frac{F}{\pi} \left[ \cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right]$$

$$= \frac{F}{\pi n^2} \cos nt \quad n=1, 3, 5, \dots$$

$$\ddot{y}_n + 1.5 \dot{y}_n + 25 y_n = \frac{F}{\pi n^2} \cos nt \quad \text{از حل این معادله } y_n \text{ میگیریم}$$

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + ky = S \cos \omega t \rightarrow y = M \cos \omega t + N \sin \omega t \quad \text{یا } y = r \sin \omega t$$

$$25 \times (y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

$$1.5 \times (\dot{y}_n = -n A_n \sin nt + n B_n \cos nt)$$

$$1 \times (\ddot{y}_n = -n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt)$$

Subject :

Year. \_\_\_\_\_ Month. \_\_\_\_\_

$$\cos nt [r \omega A_n + \dots \omega n B_n - n^r A_n] + \sin nt [r \omega B_n - \dots \omega n A_n - n^r B_n]$$

$$= \frac{r}{\pi n^r} \cos nt$$

$$\cos nt [(r \omega - n^r) A_n + \dots \omega n B_n] + \sin nt [(r \omega - n^r) B_n - \dots \omega n A_n]$$

$$= \frac{r}{\pi n^r} \cos nt$$

$$\Rightarrow (r \omega - n^r) A_n + \dots \omega n B_n = \frac{r}{\pi n^r}$$

$$A_n = \begin{vmatrix} \frac{r}{\pi n^r} & \omega n \\ 0 & r \omega - n^r \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -\dots \omega n A_n + (r \omega - n^r) B_n = 0$$

$$A_n = \begin{vmatrix} r \omega - n^r & \omega n \\ -\dots \omega n & r \omega - n^r \end{vmatrix}$$

$$B_n = \frac{\begin{vmatrix} r \omega - n^r & \frac{r}{\pi n^r} \\ -\dots \omega n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r \omega - n^r & \omega n \\ -\dots \omega n & r \omega - n^r \end{vmatrix}}$$

...  $A_n$  و  $B_n$  بحسب الطرق السابقه نري ان ...

تكميل : حل مسألة ...

$$\# 11.3 \Rightarrow 14^*, 15^*, 16^*, 17^*, 18^*$$

## 11.4 Approximation by Trigonometric polynomials

سری فورييه به عنوان اساسی در حل مسائل (معادلات دیفرانسیل) سری فورييه مورد نیاز است

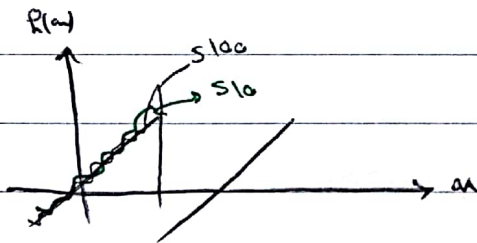
$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t)$$

در باب 11.3 بررسی کنید

همان‌طور که در مباحث قبلی دیدیم، سری فورييه در تقریب تابعی بسیار دقیق است و این سری را می‌توانیم برای تقریب تابعی استفاده کنیم

همان‌طور که در مباحث قبلی دیدیم، سری فورييه در تقریب تابعی بسیار دقیق است و این سری را می‌توانیم برای تقریب تابعی استفاده کنیم

همان‌طور که در مباحث قبلی دیدیم، سری فورييه در تقریب تابعی بسیار دقیق است و این سری را می‌توانیم برای تقریب تابعی استفاده کنیم



$$f(x) \approx a_0 \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad T=2\pi$$

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) \approx A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

در این حالت می‌توانیم برای تقریب تابعی از سری فورييه استفاده کنیم

$$\text{Error} = \begin{cases} |f(x) - F(x)| \rightarrow X \\ \max(|f(x) - F(x)|) \rightarrow X \end{cases}$$

برای بیان خط مشخص در هر دو طرف از دو طرف (معمولاً برای هر دو)

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (R-F)^2 dx \quad \checkmark$$

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (R-F)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (R^2 + F^2 - 2RF) dx$$

فرض کنیم  $F(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx$  و  $G(x) = B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \dots + B_n \sin nx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + A_n \sin nx)$$

$$+ A_n \sin nx) (A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + A_n \sin nx)$$

$$= 2\pi A_0^2 + \pi A_1^2 + \dots + \pi A_n^2 + \pi B_1^2 + \pi B_2^2 + \dots + \pi B_n^2$$

$$= \pi (2A_0^2 + A_1^2 + \dots + A_n^2 + B_1^2 + B_2^2 + \dots + B_n^2) - 2\pi A_0^2 + \pi \left( \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2) \right)$$

$$\int \cos m x \cos n x dx \quad m = n = \pi$$

$$\int \cos m x \cos n x dx \quad m \neq n = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} RF dx = \int_{-\pi}^{\pi} R (A_0 + A_1 \cos x + \dots + A_n \cos nx + B_1 \sin x + \dots + B_n \sin nx) dx$$

برای هر دو طرف از دو طرف (معمولاً برای هر دو)

فرض کنیم  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \leftarrow c$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi (2A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n + B_1 a_1 + \dots + B_n a_n)$$

$$= 2\pi A_0 a_0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (A_n b_n + B_n b_n)$$

$$\Rightarrow E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = 2\pi (2A_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n a_n + B_n b_n)) + \pi (2A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2))$$

$n=1, 2, \dots, \infty$   $\Rightarrow A_0 = a_0, B_n = B_n, a_n = A_n$  و  $E_0 = \dots$   
 در نتیجه داریم  $\dots$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

این را پارسیوال (Parseval Identity) میگویند

\* این کار که در میان دروس است

11.4: 2-3-4-5-11-12-14

### 11.5 Sturm-Liouville problems - orthogonal functions

$$\begin{cases} [p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 & s-l \text{ نی} \\ k_1 y + k_2 y' = 0 \\ p_1 y + p_2 y' = 0 \Rightarrow a=b \end{cases}$$

در  $s-l$  نی  $p(x)$  و  $r(x)$  باید مثبت باشند و  $q(x)$  می تواند مثبت یا منفی باشد.  
 اگر این شرایط برقرار باشد، جوابها در  $a$  و  $b$  (مقادیر ویژه) صواب می شوند و  
 به هم عمودند.

توابع متناهی  $y$  و  $y'$   $\Rightarrow$  حل می شود  $\lambda =$

مثال: فرض کنید  $y'' + \lambda y = 0$  را در نظر بگیرید.  $y(0) = 0$  و  $y(\pi) = 0$  را حل کنید.  $\lambda = 0$  یا  $\lambda = -k^2$  را در نظر بگیرید.

1)

$$p(\lambda) = 1 \quad y(\lambda) = 0 \quad r(\lambda) = 1$$

$$k_1 = 1, k_2 = 0 \quad p_1 = 1, p_2 = 0 \quad y'' + \lambda y = 0$$

حالت  $\lambda = 0$  - غیر متجانس است

- حالت  $\lambda = 0$   $\Rightarrow$
- 1)  $\lambda = 0$
  - 2)  $\lambda > 0$  position  $= +ve$
  - 3)  $\lambda < 0$  position  $= -ve$

1)  $\lambda = 0$   $y'' = 0 \Rightarrow y = Am + B$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y = Am \\ y(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0$  - غیر متجانس است  $y$  و  $y'$  متناهی است.

3)  $\lambda < 0$   $= -V^2 \Rightarrow y'' - V^2 y = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = A e^{Vx} + B e^{-Vx} \\ y = A \cosh Vx, B \sinh Vx \end{cases}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = A(1) + B \Rightarrow A = -B \Rightarrow y = B \sinh Vx$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = B \sinh V\pi \Rightarrow B = 0$

$\lambda < 0$  - غیر متجانس است  $y$  و  $y'$  متناهی است.

2)  $\lambda > 0$   $= +ve = V^2$

$y'' + Vy = 0 \Rightarrow y = A \cos Vx + B \sin Vx$

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = B \sin Vx$



صواب یا غلط؟  $x$  و  $\beta$  ...  $y(n) = 0$  ...  $y(n)$

$$\Rightarrow \sin \nu n \text{ و } \sin \mu n$$

$$\Rightarrow \nu n \text{ و } \mu n \Rightarrow \nu = n \Rightarrow \lambda = \nu^2 = n^2$$

مقادیر ویژه  $\lambda = 1, 4, 9, \dots$

و  $\sin 3n$  و  $\sin 4n$  و  $\sin 5n$  و  $\sin 6n$  و  $\sin 7n$  و  $\sin 8n$  و  $\sin 9n$  و  $\sin 10n$  و  $\sin 11n$  و  $\sin 12n$  و  $\sin 13n$  و  $\sin 14n$  و  $\sin 15n$  و  $\sin 16n$  و  $\sin 17n$  و  $\sin 18n$  و  $\sin 19n$  و  $\sin 20n$  و  $\sin 21n$  و  $\sin 22n$  و  $\sin 23n$  و  $\sin 24n$  و  $\sin 25n$  و  $\sin 26n$  و  $\sin 27n$  و  $\sin 28n$  و  $\sin 29n$  و  $\sin 30n$  و  $\sin 31n$  و  $\sin 32n$  و  $\sin 33n$  و  $\sin 34n$  و  $\sin 35n$  و  $\sin 36n$  و  $\sin 37n$  و  $\sin 38n$  و  $\sin 39n$  و  $\sin 40n$  و  $\sin 41n$  و  $\sin 42n$  و  $\sin 43n$  و  $\sin 44n$  و  $\sin 45n$  و  $\sin 46n$  و  $\sin 47n$  و  $\sin 48n$  و  $\sin 49n$  و  $\sin 50n$  و  $\sin 51n$  و  $\sin 52n$  و  $\sin 53n$  و  $\sin 54n$  و  $\sin 55n$  و  $\sin 56n$  و  $\sin 57n$  و  $\sin 58n$  و  $\sin 59n$  و  $\sin 60n$  و  $\sin 61n$  و  $\sin 62n$  و  $\sin 63n$  و  $\sin 64n$  و  $\sin 65n$  و  $\sin 66n$  و  $\sin 67n$  و  $\sin 68n$  و  $\sin 69n$  و  $\sin 70n$  و  $\sin 71n$  و  $\sin 72n$  و  $\sin 73n$  و  $\sin 74n$  و  $\sin 75n$  و  $\sin 76n$  و  $\sin 77n$  و  $\sin 78n$  و  $\sin 79n$  و  $\sin 80n$  و  $\sin 81n$  و  $\sin 82n$  و  $\sin 83n$  و  $\sin 84n$  و  $\sin 85n$  و  $\sin 86n$  و  $\sin 87n$  و  $\sin 88n$  و  $\sin 89n$  و  $\sin 90n$  و  $\sin 91n$  و  $\sin 92n$  و  $\sin 93n$  و  $\sin 94n$  و  $\sin 95n$  و  $\sin 96n$  و  $\sin 97n$  و  $\sin 98n$  و  $\sin 99n$  و  $\sin 100n$

توابع متعامد: توابع  $y_m$  و  $y_n$  ...  $S-L$  ...  $\int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0$  ...  $m \neq n$

$$\int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

طوره رفتار این توابع در انتهای بازه ...  $S-L$  ...  $\int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0$  ...  $m \neq n$

و این توابع متعامد در  $S-L$

جواب: طایفه  $S-L$  ...  $\int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0$  ...  $m \neq n$

### 5.2 Legendre's Equation (Legendre's Polynomials)

Legendre's polynomials  $P_n$

$$n(n+1)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad x \in [-1, 1]$$

$$n=1 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

ساده است و جواب آن  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28}, a_{29}, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, a_{36}, a_{37}, a_{38}, a_{39}, a_{40}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{48}, a_{49}, a_{50}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{55}, a_{56}, a_{57}, a_{58}, a_{59}, a_{60}, a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}, a_{65}, a_{66}, a_{67}, a_{68}, a_{69}, a_{70}, a_{71}, a_{72}, a_{73}, a_{74}, a_{75}, a_{76}, a_{77}, a_{78}, a_{79}, a_{80}, a_{81}, a_{82}, a_{83}, a_{84}, a_{85}, a_{86}, a_{87}, a_{88}, a_{89}, a_{90}, a_{91}, a_{92}, a_{93}, a_{94}, a_{95}, a_{96}, a_{97}, a_{98}, a_{99}, a_{100}, a_{101}, a_{102}, a_{103}, a_{104}, a_{105}, a_{106}, a_{107}, a_{108}, a_{109}, a_{110}, a_{111}, a_{112}, a_{113}, a_{114}, a_{115}, a_{116}, a_{117}, a_{118}, a_{119}, a_{120}, a_{121}, a_{122}, a_{123}, a_{124}, a_{125}, a_{126}, a_{127}, a_{128}, a_{129}, a_{130}, a_{131}, a_{132}, a_{133}, a_{134}, a_{135}, a_{136}, a_{137}, a_{138}, a_{139}, a_{140}, a_{141}, a_{142}, a_{143}, a_{144}, a_{145}, a_{146}, a_{147}, a_{148}, a_{149}, a_{150}, a_{151}, a_{152}, a_{153}, a_{154}, a_{155}, a_{156}, a_{157}, a_{158}, a_{159}, a_{160}, a_{161}, a_{162}, a_{163}, a_{164}, a_{165}, a_{166}, a_{167}, a_{168}, a_{169}, a_{170}, a_{171}, a_{172}, a_{173}, a_{174}, a_{175}, a_{176}, a_{177}, a_{178}, a_{179}, a_{180}, a_{181}, a_{182}, a_{183}, a_{184}, a_{185}, a_{186}, a_{187}, a_{188}, a_{189}, a_{190}, a_{191}, a_{192}, a_{193}, a_{194}, a_{195}, a_{196}, a_{197}, a_{198}, a_{199}, a_{200}, a_{201}, a_{202}, a_{203}, a_{204}, a_{205}, a_{206}, a_{207}, a_{208}, a_{209}, a_{210}, a_{211}, a_{212}, a_{213}, a_{214}, a_{215}, a_{216}, a_{217}, a_{218}, a_{219}, a_{220}, a_{221}, a_{222}, a_{223}, a_{224}, a_{225}, a_{226}, a_{227}, a_{228}, a_{229}, a_{230}, a_{231}, a_{232}, a_{233}, a_{234}, a_{235}, a_{236}, a_{237}, a_{238}, a_{239}, a_{240}, a_{241}, a_{242}, a_{243}, a_{244}, a_{245}, a_{246}, a_{247}, a_{248}, a_{249}, a_{250}, a_{251}, a_{252}, a_{253}, a_{254}, a_{255}, a_{256}, a_{257}, a_{258}, a_{259}, a_{260}, a_{261}, a_{262}, a_{263}, a_{264}, a_{265}, a_{266}, a_{267}, a_{268}, a_{269}, a_{270}, a_{271}, a_{272}, a_{273}, a_{274}, a_{275}, a_{276}, a_{277}, a_{278}, a_{279}, a_{280}, a_{281}, a_{282}, a_{283}, a_{284}, a_{285}, a_{286}, a_{287}, a_{288}, a_{289}, a_{290}, a_{291}, a_{292}, a_{293}, a_{294}, a_{295}, a_{296}, a_{297}, a_{298}, a_{299}, a_{300}, a_{301}, a_{302}, a_{303}, a_{304}, a_{305}, a_{306}, a_{307}, a_{308}, a_{309}, a_{310}, a_{311}, a_{312}, a_{313}, a_{314}, a_{315}, a_{316}, a_{317}, a_{318}, a_{319}, a_{320}, a_{321}, a_{322}, a_{323}, a_{324}, a_{325}, a_{326}, a_{327}, a_{328}, a_{329}, a_{330}, a_{331}, a_{332}, a_{333}, a_{334}, a_{335}, a_{336}, a_{337}, a_{338}, a_{339}, a_{340}, a_{341}, a_{342}, a_{343}, a_{344}, a_{345}, a_{346}, a_{347}, a_{348}, a_{349}, a_{350}, a_{351}, a_{352}, a_{353}, a_{354}, a_{355}, a_{356}, a_{357}, a_{358}, a_{359}, a_{360}, a_{361}, a_{362}, a_{363}, a_{364}, a_{365}, a_{366}, a_{367}, a_{368}, a_{369}, a_{370}, a_{371}, a_{372}, a_{373}, a_{374}, a_{375}, a_{376}, a_{377}, a_{378}, a_{379}, a_{380}, a_{381}, a_{382}, a_{383}, a_{384}, a_{385}, a_{386}, a_{387}, a_{388}, a_{389}, a_{390}, a_{391}, a_{392}, a_{393}, a_{394}, a_{395}, a_{396}, a_{397}, a_{398}, a_{399}, a_{400}, a_{401}, a_{402}, a_{403}, a_{404}, a_{405}, a_{406}, a_{407}, a_{408}, a_{409}, a_{410}, a_{411}, a_{412}, a_{413}, a_{414}, a_{415}, a_{416}, a_{417}, a_{418}, a_{419}, a_{420}, a_{421}, a_{422}, a_{423}, a_{424}, a_{425}, a_{426}, a_{427}, a_{428}, a_{429}, a_{430}, a_{431}, a_{432}, a_{433}, a_{434}, a_{435}, a_{436}, a_{437}, a_{438}, a_{439}, a_{440}, a_{441}, a_{442}, a_{443}, a_{444}, a_{445}, a_{446}, a_{447}, a_{448}, a_{449}, a_{450}, a_{451}, a_{452}, a_{453}, a_{454}, a_{455}, a_{456}, a_{457}, a_{458}, a_{459}, a_{460}, a_{461}, a_{462}, a_{463}, a_{464}, a_{465}, a_{466}, a_{467}, a_{468}, a_{469}, a_{470}, a_{471}, a_{472}, a_{473}, a_{474}, a_{475}, a_{476}, a_{477}, a_{478}, a_{479}, a_{480}, a_{481}, a_{482}, a_{483}, a_{484}, a_{485}, a_{486}, a_{487}, a_{488}, a_{489}, a_{490}, a_{491}, a_{492}, a_{493}, a_{494}, a_{495}, a_{496}, a_{497}, a_{498}, a_{499}, a_{500}, a_{501}, a_{502}, a_{503}, a_{504}, a_{505}, a_{506}, a_{507}, a_{508}, a_{509}, a_{510}, a_{511}, a_{512}, a_{513}, a_{514}, a_{515}, a_{516}, a_{517}, a_{518}, a_{519}, a_{520}, a_{521}, a_{522}, a_{523}, a_{524}, a_{525}, a_{526}, a_{527}, a_{528}, a_{529}, a_{530}, a_{531}, a_{532}, a_{533}, a_{534}, a_{535}, a_{536}, a_{537}, a_{538}, a_{539}, a_{540}, a_{541}, a_{542}, a_{543}, a_{544}, a_{545}, a_{546}, a_{547}, a_{548}, a_{549}, a_{550}, a_{551}, a_{552}, a_{553}, a_{554}, a_{555}, a_{556}, a_{557}, a_{558}, a_{559}, a_{560}, a_{561}, a_{562}, a_{563}, a_{564}, a_{565}, a_{566}, a_{567}, a_{568}, a_{569}, a_{570}, a_{571}, a_{572}, a_{573}, a_{574}, a_{575}, a_{576}, a_{577}, a_{578}, a_{579}, a_{580}, a_{581}, a_{582}, a_{583}, a_{584}, a_{585}, a_{586}, a_{587}, a_{588}, a_{589}, a_{590}, a_{591}, a_{592}, a_{593}, a_{594}, a_{595}, a_{596}, a_{597}, a_{598}, a_{599}, a_{600}, a_{601}, a_{602}, a_{603}, a_{604}, a_{605}, a_{606}, a_{607}, a_{608}, a_{609}, a_{610}, a_{611}, a_{612}, a_{613}, a_{614}, a_{615}, a_{616}, a_{617}, a_{618}, a_{619}, a_{620}, a_{621}, a_{622}, a_{623}, a_{624}, a_{625}, a_{626}, a_{627}, a_{628}, a_{629}, a_{630}, a_{631}, a_{632}, a_{633}, a_{634}, a_{635}, a_{636}, a_{637}, a_{638}, a_{639}, a_{640}, a_{641}, a_{642}, a_{643}, a_{644}, a_{645}, a_{646}, a_{647}, a_{648}, a_{649}, a_{650}, a_{651}, a_{652}, a_{653}, a_{654}, a_{655}, a_{656}, a_{657}, a_{658}, a_{659}, a_{660}, a_{661}, a_{662}, a_{663}, a_{664}, a_{665}, a_{666}, a_{667}, a_{668}, a_{669}, a_{670}, a_{671}, a_{672}, a_{673}, a_{674}, a_{675}, a_{676}, a_{677}, a_{678}, a_{679}, a_{680}, a_{681}, a_{682}, a_{683}, a_{684}, a_{685}, a_{686}, a_{687}, a_{688}, a_{689}, a_{690}, a_{691}, a_{692}, a_{693}, a_{694}, a_{695}, a_{696}, a_{697}, a_{698}, a_{699}, a_{700}, a_{701}, a_{702}, a_{703}, a_{704}, a_{705}, a_{706}, a_{707}, a_{708}, a_{709}, a_{710}, a_{711}, a_{712}, a_{713}, a_{714}, a_{715}, a_{716}, a_{717}, a_{718}, a_{719}, a_{720}, a_{721}, a_{722}, a_{723}, a_{724}, a_{725}, a_{726}, a_{727}, a_{728}, a_{729}, a_{730}, a_{731}, a_{732}, a_{733}, a_{734}, a_{735}, a_{736}, a_{737}, a_{738}, a_{739}, a_{740}, a_{741}, a_{742}, a_{743}, a_{744}, a_{745}, a_{746}, a_{747}, a_{748}, a_{749}, a_{750}, a_{751}, a_{752}, a_{753}, a_{754}, a_{755}, a_{756}, a_{757}, a_{758}, a_{759}, a_{760}, a_{761}, a_{762}, a_{763}, a_{764}, a_{765}, a_{766}, a_{767}, a_{768}, a_{769}, a_{770}, a_{771}, a_{772}, a_{773}, a_{774}, a_{775}, a_{776}, a_{777}, a_{778}, a_{779}, a_{780}, a_{781}, a_{782}, a_{783}, a_{784}, a_{785}, a_{786}, a_{787}, a_{788}, a_{789}, a_{790}, a_{791}, a_{792}, a_{793}, a_{794}, a_{795}, a_{796}, a_{797}, a_{798}, a_{799}, a_{800}, a_{801}, a_{802}, a_{803}, a_{804}, a_{805}, a_{806}, a_{807}, a_{808}, a_{809}, a_{810}, a_{811}, a_{812}, a_{813}, a_{814}, a_{815}, a_{816}, a_{817}, a_{818}, a_{819}, a_{820}, a_{821}, a_{822}, a_{823}, a_{824}, a_{825}, a_{826}, a_{827}, a_{828}, a_{829}, a_{830}, a_{831}, a_{832}, a_{833}, a_{834}, a_{835}, a_{836}, a_{837}, a_{838}, a_{839}, a_{840}, a_{841}, a_{842}, a_{843}, a_{844}, a_{845}, a_{846}, a_{847}, a_{848}, a_{849}, a_{850}, a_{851}, a_{852}, a_{853}, a_{854}, a_{855}, a_{856}, a_{857}, a_{858}, a_{859}, a_{860}, a_{861}, a_{862}, a_{863}, a_{864}, a_{865}, a_{866}, a_{867}, a_{868}, a_{869}, a_{870}, a_{871}, a_{872}, a_{873}, a_{874}, a_{875}, a_{876}, a_{877}, a_{878}, a_{879}, a_{880}, a_{881}, a_{882}, a_{883}, a_{884}, a_{885}, a_{886}, a_{887}, a_{888}, a_{889}, a_{890}, a_{891}, a_{892}, a_{893}, a_{894}, a_{895}, a_{896}, a_{897}, a_{898}, a_{899}, a_{900}, a_{901}, a_{902}, a_{903}, a_{904}, a_{905}, a_{906}, a_{907}, a_{908}, a_{909}, a_{910}, a_{911}, a_{912}, a_{913}, a_{914}, a_{915}, a_{916}, a_{917}, a_{918}, a_{919}, a_{920}, a_{921}, a_{922}, a_{923}, a_{924}, a_{925}, a_{926}, a_{927}, a_{928}, a_{929}, a_{930}, a_{931}, a_{932}, a_{933}, a_{934}, a_{935}, a_{936}, a_{937}, a_{938}, a_{939}, a_{940}, a_{941}, a_{942}, a_{943}, a_{944}, a_{945}, a_{946}, a_{947}, a_{948}, a_{949}, a_{950}, a_{951}, a_{952}, a_{953}, a_{954}, a_{955}, a_{956}, a_{957}, a_{958}, a_{959}, a_{960}, a_{961}, a_{962}, a_{963}, a_{964}, a_{965}, a_{966}, a_{967}, a_{968}, a_{969}, a_{970}, a_{971}, a_{972}, a_{973}, a_{974}, a_{975}, a_{976}, a_{977}, a_{978}, a_{979}, a_{980}, a_{981}, a_{982}, a_{983}, a_{984}, a_{985}, a_{986}, a_{987}, a_{988}, a_{989}, a_{990}, a_{991}, a_{992}, a_{993}, a_{994}, a_{995}, a_{996}, a_{997}, a_{998}, a_{999}, a_{1000}$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$P_0 = 1$$

طریقه های حل این موارد

$$P_1(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} & m = n \end{cases}$$

$$P(x) \times P_m(x) = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 P_1(x) + \dots) P_m(x) dx = 1 \text{ if } m=0$$

### 11.6 Orthogonal series - Generalized Fourier series

$$[P_m(x) y'] + [q(x) + \lambda r(x)] = 0$$

توجه: در اینجا  $q(x)$  و  $r(x)$  می توانند به صورت  $a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots$  باشند. همچنین  $y'$  می تواند به صورت  $b_0 + b_1 P_1(x) + b_2 P_2(x) + \dots$  باشد.

11.5 : 5, 6, 13, 14

11.6 : 8, 9, 10, 11 → جدول اول در اینجا