توابع پریودیک

تابع $f(x)$ را می‌گوییم دارای دوره‌ی تناوب است اگر: $f(x+T)=f(x)$

T مقدار دوره‌ی تناوب

T را کوچکترین دوره‌ی تناوب است.

اگر T دوره‌ی تناوب تابع $f(x)$ باشد nT هم دوره‌ی تناوب آن خواهد بود.

$$\sin x = \sin(x+2\pi)$$
$$f(x) = f(x+2\pi) \qquad 2\pi = T$$

دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=\sin 2x$ را بدست آورید.

$$\sin 2x = \sin(2x+2\pi)$$
$$\sin 2[x] = \sin 2(x+\pi)$$
$$f(x) = f(x+\pi) \Rightarrow T=\pi$$

⇐ دوره‌ی تناوب $\sin nx$ می‌شود $T=\frac{2\pi}{n}$.

" " " $\cos nx$ "

بسط فوریه

بسط فوریه تابع پریودیک $f(x)$ با دوره‌ی تناوب $T=2\pi$ (بر حسب) یک سری تشکیل از جملات مثلثاتی $\sin$ و $\cos$ می‌باشد) بصورت زیر است:

تعریف بسط

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \dots + a_n\cos nx + \dots + b_1\sin x + \dots + b_n\sin nx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(x)\, dx$$

بازه‌ای به طول 2π مثل $(-\pi, \pi)$ یا $(0, 2\pi)$

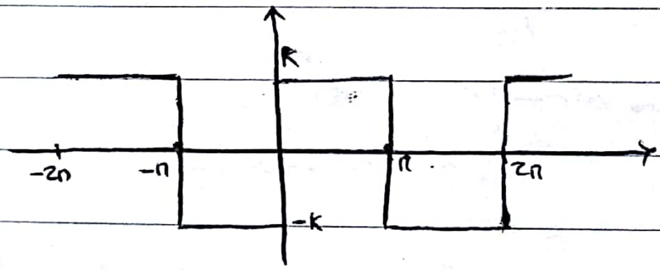
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$\Rightarrow$ ضرایب اویلر بسط فوریه

در حال حاضر فرض می‌کنیم که این تابع بسط فوریه را به دست می‌دهد. در ادامه این ضرایب را استخراج خواهیم کرد.

مثال: بسط فوریه تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π را به دست آورید.



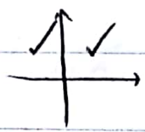
$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < \pi \\ -k & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(x)\, dx = 0 \Rightarrow$$ می‌توان با انتگرال‌گیری نشان داد

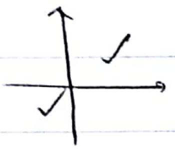
با مساحت زیر منحنی در بازه 2π

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \cos nx = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx = +\frac{k}{\pi n} \sin(n\pi - 0) = 0 \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} k \cos nx \, dx = -\frac{k}{\pi n} \sin(0 + n\pi) = 0 \end{cases}$$

یادآوری: تابع زوج $f(-x)=f(x)$



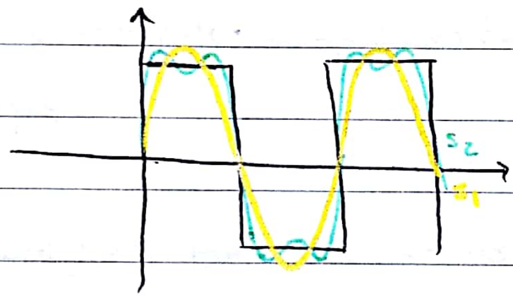
تابع فرد $f(-x)=-f(x)$

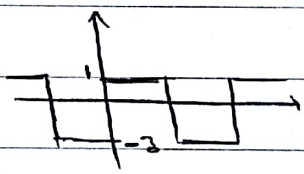


$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi}k\underbrace{\sin nx\,dx}_{-\frac{\cos nx}{n}}+\int_{-\pi}^{0}-k\underbrace{\sin nx\,dx}_{-\frac{\cos nx}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{k}{n}\left(\cos(n\pi)-1\right)+\frac{k}{n}\left(1-\cos(n\pi)\right)\right)=\frac{2k}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$f(x)=\frac{4k}{\pi}\sin x+\frac{4k}{3\pi}\sin 3x+\dots=\frac{4k}{\pi}\left(\underbrace{\underbrace{\sin x}_{S_1}+\frac{\sin 3x}{3}}_{S_2}+\dots\right)$$





$\Rightarrow$ بسط عمود از شکل عمود از فرم بالا است به محور یک واحد شیفت داده شده باشد. *

مسئله: بسط فوریه تابع $f(x)$ را از دو طریق به دست آورید و منحنی آن را رسم کنید (تعداد 15 S_{15})

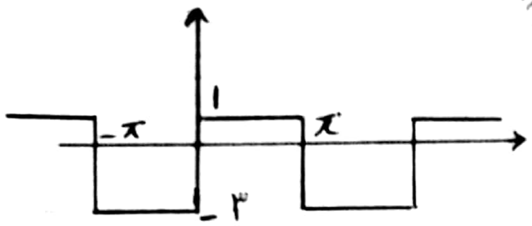
الف) مستقیم با محاسبه‌ی ضرایب

ب) با استفاده از تجربه‌ای که در حل مسائل سوالات به دست آورید مسئله را حل نمایید.

Subject
Date

تکلیف: ۱-

بسط فوریه‌ی تابع $f(x)$ آورده‌شده را با دو روش بدست آورید.



جلسه ۲ (۹۶, ۸, ۱۴).

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$$

$f(x)$ تابعی با دوره تناوب 2π است.

یادآوری: محاسبه ضرایب اویلر:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(n-m)x\right] dx$$

$$m \neq n \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-m} \sin(n-m)x \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$=0$ از (n, m عدد صحیحی می‌باشند)

$$m = n \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m} \sin 2mx + \frac{1}{2} x \right|_{-\pi}^{\pi} = \pi \right.$$

Date

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(n-m)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$m \neq n \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{2}(-1)\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + \frac{1}{2}\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x \, dx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ = 0 \end{array} \right.$

$m = n \rightarrow \left[= \frac{1}{2}(-1)\cdot\frac{1}{2m}\sin 2mx + \frac{1}{2}x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(n-m)x\right] dx$$

$m \neq n \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(n-m)x\right] dx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

$m = n \rightarrow \left\{ = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2m}\right)\cos 2mx + \frac{1}{2}(0) = 0 \right.$

تابع $f(x)$ را در $\cos mx$ ضرب می‌کنیم ($m=n$ باشد)

if $m = n \rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx \, dx = 0 + \pi \cdot a_n \rightarrow a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos mx \, dx}{\pi}$$

تابع $f(x)$ را در $\sin mx$ ضرب می‌کنیم ($m=n$ باشد)

if $m = n \rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx \, dx = 0 + 0 + 0 + b_n\pi \rightarrow b_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx \, dx}{\pi}$$

از خود تابع f، انتگرال بگیرید

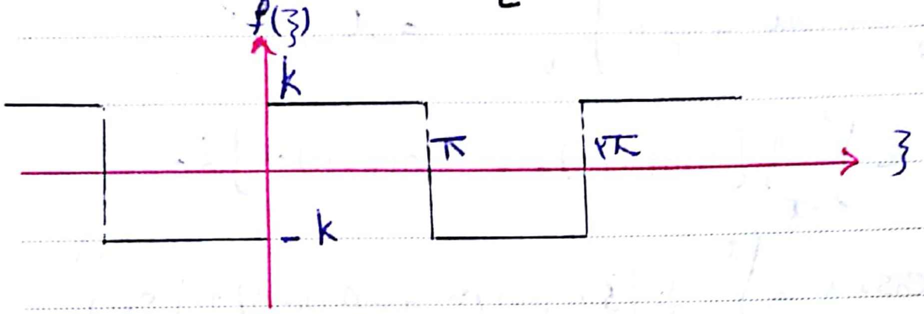
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_1\cos x + a_2 + \cdots \rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Subject
Date

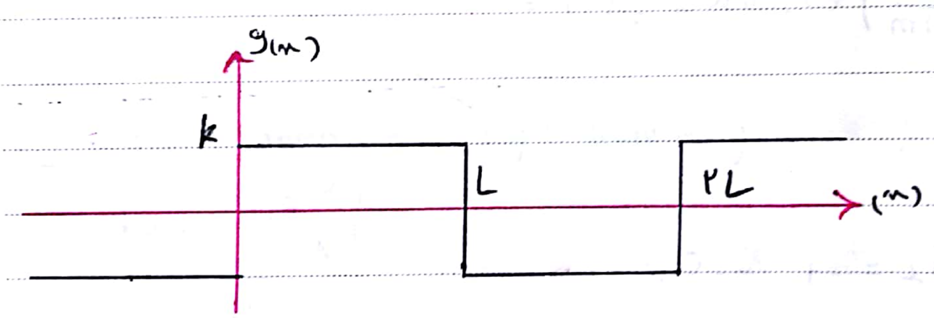
مقدار دلخواه $T=2L$ را داریم؟

$$f(x) = a_0 + a_1\cos\frac{\pi x}{L} + a_2\cos\frac{2\pi x}{L} + a_3\cos\frac{3\pi x}{L} + \dots + a_n\cos\frac{n\pi x}{L} \dots$$

$$+ b_1\sin\frac{\pi x}{L} + b_2\sin\frac{2\pi x}{L} + \dots + b_n\sin\frac{n\pi x}{L} + \dots$$



$$f(\xi) = a_0 + \Sigma\left(a_n\cos(n\xi) + b_n\sin(n\xi)\right)$$



$$\frac{\xi}{\pi} = \frac{x}{L} \rightarrow \xi = \frac{\pi x}{L} \rightarrow d\xi = \frac{\pi\, dx}{L}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi x}{L}\right) = a_0 + \Sigma\left(a_n\cos n\frac{\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = a_0 + \Sigma\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\cdot dx$$

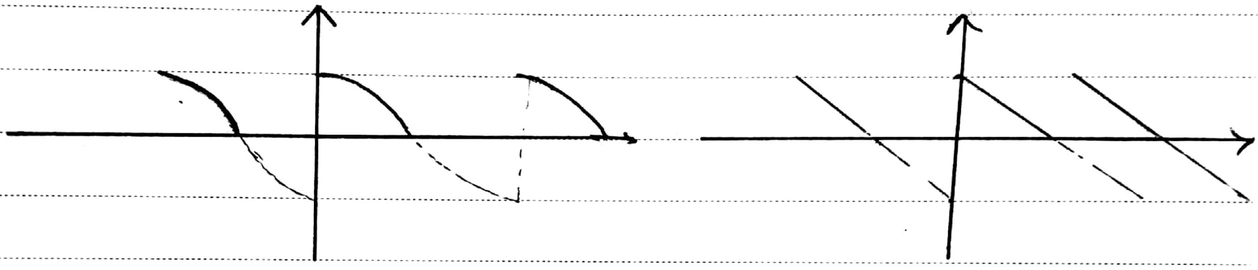
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int f\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi \frac{dx}{L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx .$$

در برخی موارد تابع در نصف دوره تناوب داده می‌شود و به ما گفته می‌شود که

- sine half-range expansion

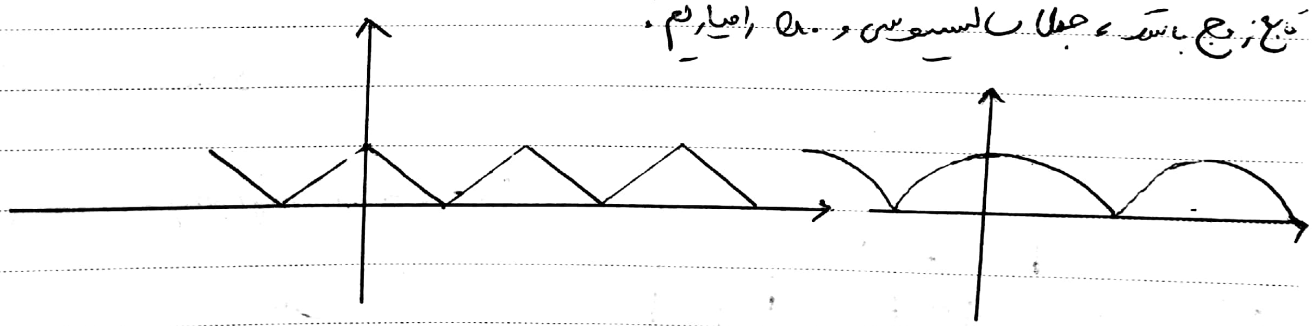
آن را بسط سینوسی بدهیم. یعنی؛ فرض می‌کنیم که تابع دارای جملات صرفاً سینوسی است.



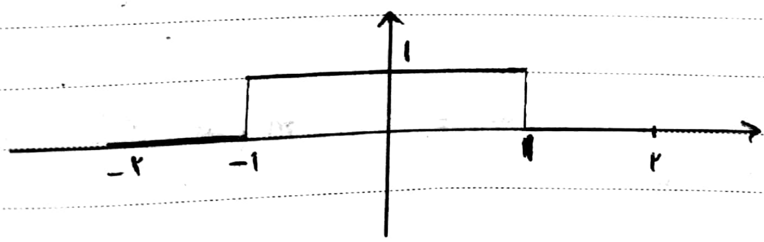
(یعنی؛ تابع فرد شده در نصف تابع باشد.)

- cosine half-range expansion.

تابع زوج باشد، جملات کسینوسی و a_0 را داریم.



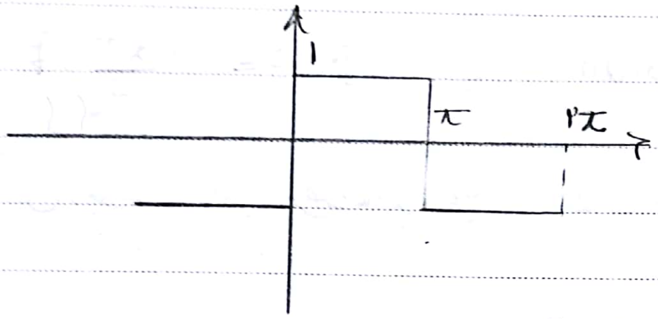
مثال: بسط تابع روبرو را بنویسید.



Subject
Date

$$g(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2}\ldots\right)$$ تابع g تابع زوج است.

حاصل عبارت زیر را بدست آورید.
$$A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots$$



$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots\right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots\right]$$

$$\rightarrow A=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

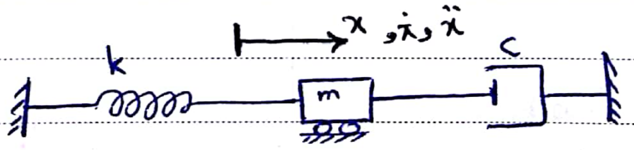
11.1. 2, 8, 9*, 17*, 19*, 21
12.2. 8, 9*, 10, 14*, 20*, 25, 28 ویرایش 10 درنظر بگیر

جلسه ۳ (۹۶, ۸, ۲۷).

11.3. forced oscillations ← نوسانات اجباری

جابجایی‌ها در دینامیک.

رسم جسم آزاد (Free body diagram)



مجموعه جرم و فنر و دمپر

x: جابجایی فنر از حالت خنثی

$\dot{x}$: سرعت جسم (جرم ۱)

$\ddot{x}$ = شتاب جسم m

Subject :
Year. Month.

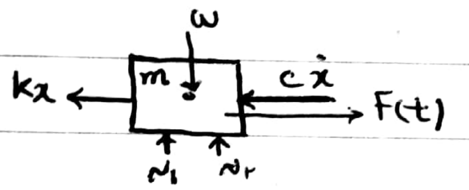
شکل شماتیک دمپر: (shock absorber) کمک فنر خودرو

رفتاری مشابه را دارد می‌تی روغن از بین حفره‌ها عبور داده

C : مشخصه خاصیت میرائی

$$F \propto \dot{x} \longrightarrow F = c\dot{x}$$

Free body diagram



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\xrightarrow{+} F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \left(\sum f_{(x)} = m\ddot{x} \right)$$

$$\downarrow$$

- در این درس، نیروی F(t) تابع پریودیک است. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ را

- برای تشخیص همگن بودن یک معادله، f(t) بایستی صفر گردد. عاملی که باعث ناهمگنی معادله شده F(t) است.

- F(t) (نیروی خارجی) عامل خارج شدن معادله دیفرانسیل از حالت همگن می‌باشد.

- معادله $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ معادله همگن است چون $x = 0$ در آن صدق می‌کند.

- این معادله خطی است چون حاصل ضرب x و $\ddot{x}$ و $\dot{x}$ در معادله وجود ندارد.

SINACO

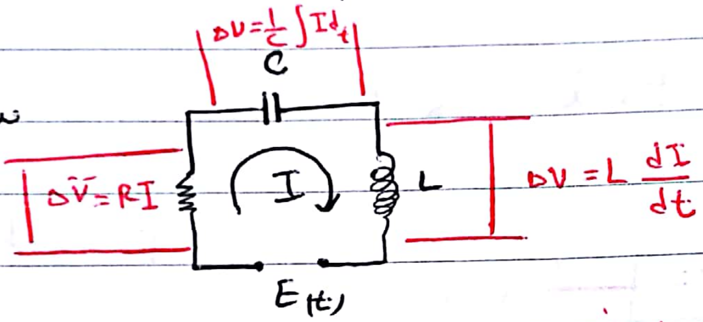
Subject :

Year. Month.

ویژگی های معادله را.

غیرهمگن : خطی - مرتبه ۲ -

مدار الکتریکی



$$RI + \frac{1}{C}\int I\,dt + L\frac{dI}{dt} = E(t) \xrightarrow[\text{بگیرید}]{\text{از طرفین مشتق}}$$

$$R\dot{I} + \frac{1}{C} I + L\ddot{I} = \dot{E}(t)$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{E}(t)$$

خطی
مرتبه ۲
غیرهمگن

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$ همگن $$\Rightarrow x_c = c_1 x_1 + c_2 x_2$$ را

جواب تشکیل معادله همگن.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = a_0 + a_1\cos\frac{\pi t}{L} + a_2\cos\frac{2\pi t}{L} + \dots$$

$$+ b_1\sin\frac{\pi t}{L} + b_2\sin\frac{2\pi t}{L} + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right)$$

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = a_i\cos\frac{i\pi t}{L} + b_i\sin\frac{i\pi t}{L}$$

SINACO

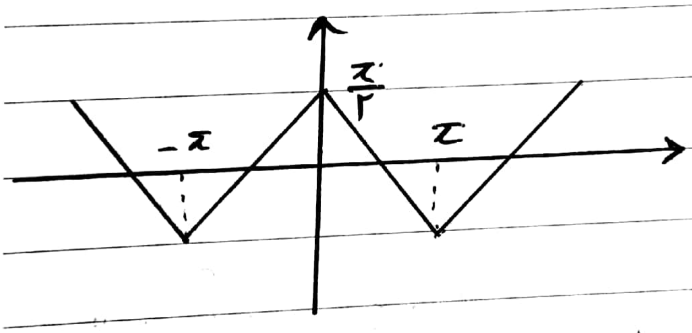
Subject :
Year. Month.

$$x_p = \frac{a_0}{k} + \sum_{1}^{\infty} x_i \quad (۳$$

$$x_{(t)} = x_p + x_c \xrightarrow{(۱),(۲)} x(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \frac{a_0}{k} + \sum_{1}^{\infty} x_i$$

مثال: سیستم جرم فنر دمپر تحت نیروی خارجی پریودیک داده شده را حل نمایید. (جواب حالت پایا)

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t) \qquad m=1 \;,\; c=0.05 \;,\; k=25$$



جدول ۲.۱ شکل جواب های خاص برای بدست آوردن معادله (ص ۸۲ کتاب درسی)

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left[\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\cos nt \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\ddot{y}_n + 0.05\,\dot{y}_n + 25 y_n = \frac{4}{\pi n^2}\cos nt$$

از حل این معادله y_n بدست می آید.

یادآوری:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = S\cos \omega t \rightarrow y = M\cos\omega t + N\sin\omega t$$

یا

$$= r\sin\omega t$$

$$25 \times (y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

$$0.05 \times (\dot{y}_n = -nA_n \sin nt + nB_n \cos nt)$$

$$1 \times (\ddot{y}_n = -n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt)$$

SINACO

Subject :
Year. Month.

$$\cos nt\left[25A_n + 0.05\,nB_n - n^2A_n\right] + \sin nt\left[25B_n - 0.05\,nA_n - n^2B_n\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\cos nt$$

$$\cos nt\left[(25-n^2)A_n + 0.05\,nB_n\right] + \sin nt\left[[25-n^2]B_n - 0.05\,nA_n\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\cos nt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (25-n^2)A_n + 0.05\,nB_n = \dfrac{4}{\pi n^2} \\ -0.05\,nA_n + (25-n^2)B_n = 0 \end{cases}$$

$$A_n = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{\pi n^2} & 0.05n \\ 0 & 25-n^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25-n^2 & 0.05n \\ -0.05n & 25-n^2 \end{vmatrix}}$$

$$B_n = \frac{\begin{vmatrix} 25-n^2 & \frac{4}{\pi n^2} \\ -0.05\,n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25-n^2 & 0.05\,n \\ -0.05n & 25-n^2 \end{vmatrix}}$$

حالا A_n , B_n را برحسب n داریم بیاییم n را از آنجا ... می‌گذاریم و y_n را پیدا می‌کنیم.

تکلیف: کل مسائل حل شده را بیابید.

\# 11.3 → 14, 15*, 16, 17*, 18*

SINACO

11.4 Approximation by Trigonometric polynomial

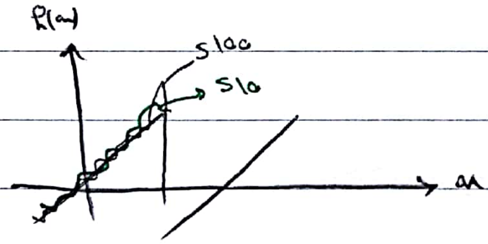
سری فوریه یک نقش اساسی در حل معادلات دیفرانسیل که تحت یک نیروی خارجی غیرپریودیک

می باشند ایفا می کند. این موضوع در 11.3 بررسی شد. $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$

یکی دیگر از کاربردهای سری فوریه در تئوری تقریب می باشد در این حیث یک تابع پیچیده را بر

حسب یک بسط مثلثاتی بیان می کنیم و میزان توابع ساده تر کار می باشد.

تحلیل خطا تابع اصلی از بسط را بررسی می کنیم



$f(x) = x \qquad -\pi \leq x \leq \pi \qquad T = 2\pi$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

روش های مختلفی برای بیان خطا می توان ارائه کرد.

Error = $\begin{cases} f(x) - F(x) \rightarrow \text{مثبت منفی دارد} \; X \\ |f(x) - F(x)| \rightarrow X \end{cases}$ $\quad \max(|f(x) - F(x)|)\; X$

Sa Su Mo Tu We Fr Th   Date: Subject:

یک راه مناسب برای بیان خطا، یک شاخص عددی برای کل دوره تناوب باشد (نه صرفاً برای یک نقطه)

$$E=\int_{-\pi}^{\pi}(f-F)^2\,dx \quad \checkmark$$

$$E=\int_{-\pi}^{\pi}(f-F)^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^2+F^2-2fF\right)dx \quad *$$

* به جای $F(x)$ از بسط تابع استفاده می‌شود. $F(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\dots+A_n\cos nx$

$$B_1\cos x+B_2\cos 2x+\dots+B_n\sin nx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}F^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\big(A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\dots+A_n\cos nx+B_1\sin x+B_2\sin 2x\dots$$

$$+A_n\sin nx\big)\big(A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\dots+A_n\cos nx+B_1\sin x+B_2\sin 2x+\dots+A_n\sin nx\big)$$

$$=2\pi A_0^2+\pi A_1^2+\dots+\pi A_n^2+\pi B_1^2+\pi B_2^2+\dots+\pi B_n^2$$

$$=\pi\left(2A_0^2+A_1^2+\dots+A_n^2+B_1^2+B_2^2+\dots B_n^2\right)=2\pi A_0^2+\pi\left(\sum_{n=1}^{N}\left(A_n^2+B_n^2\right)\right)$$

یادآوری: $\left\{\begin{array}{ll}\int \cos mx\cos nx\,dx & m=n=\pi\\ \quad " \quad " & m\neq n=0\end{array}\right.$

$$\int_{-\pi}^{\pi}fF\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f\left(A_0+A_1\cos x+\dots A_n\cos nx+B_1\sin x+\dots B_n\sin nx\right)dx$$

* برای اینکه بتوان حاصل انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi}fF\,dx$ را به صورت ساده‌تری بیان کرد به جای f

حال $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ را فرض می‌دهیم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF\,dx=\pi(2A_0a_0+A_1a_1+A_2a_2+\dots+A_na_n+B_1a_1+\dots B_na_n)$$
$$=2\pi A_0a_0+\pi\sum_{n=1}^{N}(A_nb_n+B_nb_n)$$

$$\Rightarrow E=\int_{-\pi}^{\pi} f^2-2\pi\Big(2A_0a_0+\sum_{n=1}^{N}(A_na_n+B_nb_n)\Big)+\pi\Big(2A_0^2+\sum_{n=1}^{N}(A_n^2+B_n^2)\Big)$$

در حالت $E=0$ ، $a_n=A_n$ ، $b_n=B_n$ ، $A_0=a_0$ برای $n=1,2,\dots,N$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx = 2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

اتحاد پارسوال (parseval Identity)

* این اتحاد حتماً در پایان‌ترم می‌آید.

11.4: 2_3_4_5_11*_12*_14*

11.5 strum_Liouville problems_orthogonal functions

مسائل S-L

$$\begin{cases}[p(x)y']'+[q(x)+\lambda r(x)]y=0\\ k_1y+k_2y'=0\\ l_1y+l_2y'=0 \Rightarrow x=b\end{cases}$$

مسئله S-L یک معادله‌ی حلی است یعنی y یکی از ریشه‌های معادله است.

λ در اینجا پارامتری است که به ازای مقادیر خاص آن (مقادیر ویژه) جواب غیر صفر را به دست می‌آوریم

Sa Su Mo Tu We Th Fr

Date: Subject:

توابع ویژه = y (غیر صفر) = مقادیر ویژه = λ

مثال: الف) بررسی شده به معادله دیفرانسیل $y''+\lambda y=0$ با شرایط مرزی $y(0)=0$ و $y(\pi)=0$ تشکیل یک مساله S-L را میدهد. ب) جواب مساله را بدست آورید.

الف)

$p(x)=1 \quad q(x)=0 \quad r(x)=1$

$k_1=1, k_2=0 \quad \rho_1=1, \rho_2=0 \quad y''+\lambda y=0$

مقادیر λ بصورتی که جواب غیر صفر ایجاد کند

λ حالات مختلف $\Rightarrow$
$$\begin{cases} 1)\ \lambda=0 \\ 2)\ \lambda>0 \ \text{position} = +ve \\ 3)\ \lambda = -ve \end{cases}$$

1) $\lambda=0 \quad y''=0 \quad y=Ax+B \begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow y=Ax \\ y(\pi)=0 \Rightarrow A=0 \end{cases}$

$\lambda=0$ جواب غیر صفر برای y تولید نمی‌کند.

3) $\lambda = -ve = -v^2 \quad y''-v^2y=0 \Rightarrow \begin{cases} y=A'e^{vx}+B'e^{-vx} \\ y=A\cosh vx + B\sinh vx \end{cases}$

$y(0)=0 \Rightarrow 0 = A(1)+0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow y = B\sinh vx$

$y(\pi)=0 \Rightarrow 0 = B\sinh v\pi \Rightarrow B=0$

$\lambda<0$ جواب غیر صفر برای y ایجاد نمی‌شد

2) $\lambda>0 = +ve = v^2$

$y''+v^2y=0 \Rightarrow y = A\cos vx + B\sin vx$

$y(0)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow y = B\sinh vx$

Sa Su Mo Tu We Fr Th

Date: Subject:

جواب مسئله ... $X = B$ ... $B \sin vn = 0 \Rightarrow y(n) = 0 \Rightarrow y(n) =$

$\sin vn = \sin n\pi$

$\Rightarrow vn = n\pi \Rightarrow v = n \Rightarrow \lambda = v^2 = n^2$

مقادیر ویژه $\lambda = 1, 4, 9, \ldots$

توابع ویژه متناظر مقادیر ویژه $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ...

جملات سری مکلورن استفاده در بسط یک تابع به صورت بسط فوریه

توابع متعامد: توابع y_m و y_n که جواب های مسئله S-L هستند دارای خاصیت زیر هستند که به آن شرط تعامد گفته می‌شود. $r(x)$ یک تابع وزنی است

$$\int_a^b r(x)\, y_m(x) \cdot y_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

a و b نقاط شرایط مرزی است مسئله S-L در آنها اعمال می‌شود.

واسطه شرط تعامد مسئله S-L

جواب های مسئله S-L توابع ویژه‌ای ایجاد می‌کنند که دارای شرایط تعامد هستند.

یادآوری از بخش 5.2 کتاب)

5.2 legander's Equation لژاندر

legander's polynomials چند جمله‌ای ها جواب معادله دیفرانسیل P_n

P_n

معادله دیفرانسیل لژاندر $\Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ $\quad n = cte$

Sa Su Mo Tu We Th Fr   Date: Subject:

$n=1 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

همه ضرایب a_m برحسب a_0 و a_1 بدست می‌آیند

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

جواب‌های معادله لژاندر

$P_0 = 1$

$P_1(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 75x^3 + 15x)$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m=1,\ n=2 \\ \neq 0 & m=n=2 \end{cases}$$

$$f(x) \times P_m(x) = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 P_1(x) + \dots) P_m(x)\,dx \quad -1 \le x \le 1$$

11.6 Orthogonal series – Generalized Fourier series

$$[p(x) y']' + [q(x) + \lambda r(x)] = 0$$

تکلیف: بررسی پایه‌ای معادله‌ی دیفرانسیل لژاندر
بسل
قابلیت این را دارند که به شکل ساده بیان شوند

11.5 : 5, 6, 13*, 14

11.6 : 8, 9, 10, 11 → تحویل: روز امتحان